8.
Vectores en el plano*

1. Dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ forman un ángulo de $30°$. Determina el ángulo de los vectores:
   a) $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$.
   b) $\overrightarrow{u}$ y $t \cdot \overrightarrow{v}$, para $t < 0$.
   c) $\overrightarrow{u}$ y $t \cdot \overrightarrow{v}$, para $t > 0$.

2. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (2, 5)$. Determina las coordenadas de $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$.

3. Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$, siendo $A(2, 1)$.
   a) Halla las coordenadas del extremo B.
   b) Halla las coordenadas del punto medio entre A y B.

4. Dados los puntos $A(2, 5)$, $B(5, 2)$, $C(8, 3)$. Halla un punto D para que formen un paralelogramo.

5. Demuestra que si un vector $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $\overrightarrow{w}$ entonces, $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}$.

6. Dado el vector $\overrightarrow{u}$ de coordenadas $(1, -3)$:
   a) Encuentra un vector de módulo 1 en la dirección de $\overrightarrow{u}$.
   b) Encuentra un vector de módulo 1 ortogonal a $\overrightarrow{u}$.
   c) Encuentra un vector ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y con su mismo módulo.

7. Dado el vector $\overrightarrow{u} = (a, -2)$.
   a) Halla a sabiendo que $|\overrightarrow{u}| = 5$.
   b) Determina $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.

8. Halla b para que el triángulo de vértices $A(2, 11)$, $B(5, 2)$ y $C(11, b)$ sea rectángulo.

9. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 5)$ y $\overrightarrow{v} = (-2, 3)$
   a) Determinar el ángulo que forman.
   b) Determinar $(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$.

10. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2, -5)$ y $\overrightarrow{v} = (3, a)$.
    a) Halla a para que tengan la misma dirección.
    b) Halla a para que sean ortogonales.
    c) Halla a para que formen un ángulo de $60°$.

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

11. Un vector $\overrightarrow{u}$ tiene módulo 2 y forma $30°$ con el eje OX. Otro vector $\overrightarrow{v}$ tiene módulo 3 y forma $60°$ con el eje OY. Determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y el ángulo que forma con el eje OX.

12. Halla los ángulos del triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(1,4)$, $C(-1,2)$.

13. Dados los puntos $A(1,2)$ y $B(5,3)$. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano P tales que $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{AP}$.

14. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano P tales que $|\overrightarrow{AP}| = 3$, siendo $A(2,3)$.

15. Escribe directamente un vector normal de las siguientes rectas:

    a) $2x - 3y + 6 = 0$.
    b) $y = -3x + 4$.

16. Dada la recta de ecuaciones paramétricas:
    $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$, $(t \in \mathbb{R})$.
    a) Encuentra tres puntos de la recta y represéntala gráficamente.
    b) Averigua si los puntos $A(4,2)$ y $B(7,-3)$ pertenecen a la recta.
    c) Localiza los puntos de corte con los ejes.

17. Dada la recta de ecuaciones paramétricas:
    $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$, $(t \in \mathbb{R})$,
    exprésala, también en forma paramétrica, pero con ecuaciones diferentes. Para ello, sustituye el punto $(-1,3)$ y el vector $\overrightarrow{v} = (5,-2)$ que aparecen en las ecuaciones por otros de la misma recta.

18. Escribe directamente, en forma paramétrica, la ecuación de la recta pedida en cada caso:

    a) Pasa por el punto $(1,-4)$ y es paralela a la recta:
    $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\}$, $(t \in \mathbb{R})$.
    b) Pasa por el punto $(-3,4)$ y es paralela a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.
    c) Pasa por el punto $(3,-2)$ y es paralela a la recta
    $y = -3x + 4$.
    d) La ecuación de una recta vertical que pasa por el punto $(2,-3)$.
    e) La ecuación de una recta horizontal que pasa por el punto $(2,-3)$.

19. Estudia la posición relativa de las rectas:
    $$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha \\ y = -3 + 3\alpha \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{l} x = -3 - 4\alpha \\ y = 5 + 6\alpha \end{array}\right\} (\alpha \in \mathbb{R})$$

20. Escribe directamente, en forma paramétrica, la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3,4)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

21. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a,3)$ y $\overrightarrow{v} = (2,b)$.

    a) Halla a y b para que sean paralelos y $|\overrightarrow{u}| = 5$.
    b) Halla a y b para que sean perpendiculares y $|\overrightarrow{v}| = 3$.

22. Determina un vector $\overrightarrow{u}$ sabiendo que es perpendicular a $\overrightarrow{v} = (3,5)$ y forma $45°$ con $\overrightarrow{w} = (2,1)$.

23. Demuestra que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

24. Dados los puntos $A(-1,1)$ y $B(1,3)$, halla un punto C para que los tres sean vértices de un triángulo equilátero.

25. Considera un cuadrilátero cualquiera y une los puntos medios de los lados. Demuestra que la figura que se forma es un paralelogramo.

26. Para demostrar que las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto (ortocentro), comprueba que si las alturas de vértice en A y B se cortan en O, entonces $\overrightarrow{CO}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

27. Halla los vértices de un triángulo, sabiendo que los puntos medios de los lados son: $M(1,5)$, $N(3,2)$, $P(-1,3)$.

28. Los puntos $A(-1,1)$ y $B(1,3)$ determinan un cateto de un triángulo rectángulo. Halla el otro punto C para que el otro cateto mida 5.

29. Dados dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, tales que $|\overrightarrow{a}| = 13$, $|\overrightarrow{b}| = 19$ y $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 24$, halla $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$.

30. Calcula el ángulo formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.